第 47 講　総合問題⒂

1　実数 a，b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$　とおく．

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$　を満たす実数 c を求めよ．

(2)　(1)で求めた c について，a，b が条件　$a<c<b$　を満たすとする．このとき，連立不等式

$$f(x)<0 \quad \text{かつ} \quad g(x)<0$$

が解をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上に円 $C：x^2+(y+2)^2=4$　がある．中心　$(a,\ 0)$，半径 1 の円を D とする．C と D が異なる 2 点で交わるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　C と D の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3)　a が(1)の範囲を動くとき，(2)の直線が通過する領域を図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　係数 a，b が整数である 3 次方程式　$x^3+ax^2+bx+1=0$ が 2 つの虚数解と 1 つの整数解をもつ．これを満たす整数の組 $(a,\ b)$ はいくつあるか求めよ．またそのうち a の値が最大となるときの $(a,\ b)$ を求めよ．

[2]　2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　総合問題⒂

三角形ABCにおいて $\angle A=\theta$，$\angle B=2\theta$ であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を $\cos\theta$ を用いて表すと $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\boxed{\text{ア}}\cos\theta$ である．

(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}$ の値が最大となるとき，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(3) $\angle B$ の二等分線と辺ACとの交点をDとするとき，等式

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}$$

を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　総合問題⒂

[1]　実数 a, b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$, $g(x)=x^2-2bx+a$　とおく．

(1)　$a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$　を満たす実数 c を求めよ．

(2)　(1)で求めた c について，a, b が条件　$a<c<b$　を満たすとする．このとき，連立不等式

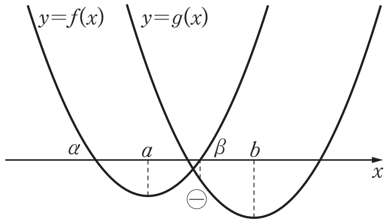
$$f(x)<0 \quad \text{かつ} \quad g(x)<0$$

が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ．

(1)　$f(c)=g(c)$　より　$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a$

$2(a-b)c=b-a$　　$a\neq b$　より　$\boldsymbol{c=-\dfrac{1}{2}}$

(2)　$a<c<b$　より　$a<-\dfrac{1}{2}<b$



$f(x)<0$　かつ　$g(x)<0$　が解をもつとき，

$f(x)=0$ の2解を α, β（$\alpha<\beta$）とすると

$\beta^2-2a\beta+b=0$　つまり　$\beta^2=2a\beta-b$　……①

このとき　$g(\beta)<0$　であることが必要．

①より　$g(\beta)=\beta^2-2b\beta+a$

$$=2a\beta-b-2b\beta+a=2\beta(a-b)+(a-b)=(a-b)(2\beta+1)$$

$a<b$ より　$a-b<0$

よって　$g(\beta)<0$ が成り立つためには　$2\beta+1>0$　つまり $\beta>-\dfrac{1}{2}$　であることが必要

$f(x)=0$　より　$x=a\pm\sqrt{a^2-b}$　　よって　$\beta=a+\sqrt{a^2-b}>-\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{a^2-b}>-(2a+1)$　　$a<-\dfrac{1}{2}$ より両辺は正．よって両辺を2乗すると

$4(a^2-b)>4a^2+4a+1$　　$a+b+\dfrac{1}{4}<0$

このとき $f(x)=0$ の判別式 D について $\dfrac{D}{4}=a^2-b>a^2+a+\dfrac{1}{4}=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq 0$　より

確かに $f(x)=0$ は異なる2解 α, β をもつ．

逆に　$a+b+\dfrac{1}{4}<0$　のとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}<0$　より

$f(x)<0$　かつ　$g(x)<0$　は解 $x=-\dfrac{1}{2}$ をもつ．

よって求める条件は　$\boldsymbol{a+b+\dfrac{1}{4}<0}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上に円 $C: x^2+(y+2)^2=4$　がある．中心　$(a,\ 0)$，半径1の円を D とする．C と D が異なる2点で交わるとき，次の問いに答えよ．

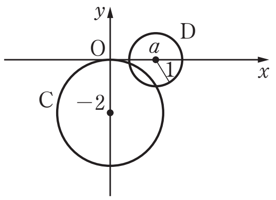
(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　C と D の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3)　a が(1)の範囲を動くとき，(2)の直線が通過する領域を図示せよ．

(1)　C：$x^2+(y+2)^2=4$　　中心 $(0,\ -2)$　半径2

D：$(x-a)^2+y^2=1$　　中心 $(a,\ 0)$　半径1



C と D の中心間の距離は　$\sqrt{a^2+4}$

C と D が異なる2点で交わるのは

(中心間距離)<(2円の半径の和)　のとき

よって　$\sqrt{a^2+4}<3$　　$a^2+4<9$　　$a^2<5$

よって　$\boldsymbol{-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}}$

(2)　$\{x^2+(y+2)^2-4\}+k\{(x-a)^2+y^2-1\}=0$　より

$(1+k)x^2+(1+k)y^2-2akx+4y+(a^2-1)k=0$

$k=-1$　のときこの式は2円C，Dの交点を通る直線を表す．

よって　$\boldsymbol{2ax+4y-a^2+1=0}$

(3)　(2)の直線は $y=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

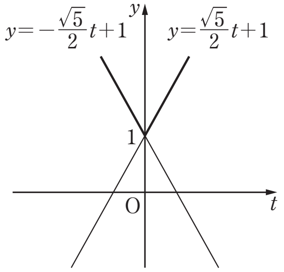
ここで x を $x=t$ に固定し，右辺を a の関数 $f(a)$ とみると

$$f(a)=\frac{1}{4}a^2-\frac{t}{2}a-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a-t)^2-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$$

$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ における y のとりうる値が，求める直線の通過領域のうち $x=t$ 上に存在する y の変域である．

(i)　$t\leqq-\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<y<f(\sqrt{5})$　つまり　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1$



(ii)　$-\sqrt{5}<t<\sqrt{5}$ のとき　$f(t)\leqq y<\max\{f(-\sqrt{5}),\ f(\sqrt{5})\}$

つまり　$-\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<\max\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1\right\}$　より

$-\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}|t|+1$

(iii)　$\sqrt{5}\leqq t$　のとき $f(\sqrt{5})<y<f(-\sqrt{5})$　　つまり　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1$

x を動かすことにより

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x \leqq -\sqrt{5}$　のとき $\frac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$　のとき

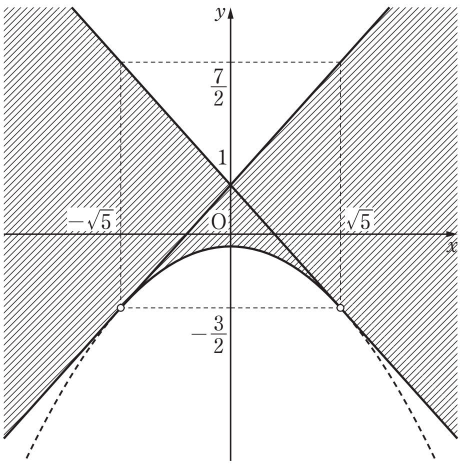
$-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4} \leqq y<\frac{\sqrt{5}}{2}|x|+1$

$\sqrt{5} \leqq x$ のとき　$-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

よって求める通過領域は，右図斜線部分．

境界は　$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$（$|x|<\sqrt{5}$）のみ含み

他は含まない．



> **3**［1］　係数 a，b が整数である3次方程式　$x^3+ax^2+bx+1=0$ が2つの虚数解と1つの整数解をもつ．これを満たす整数の組 $(a,\ b)$ はいくつあるか求めよ．またそのうち a の値が最大となるときの $(a,\ b)$ を求めよ．

$x^3+ax^2+bx+1=0$　……①　の実数解を $x=n$　とおくと

①は　$(x-n)(x^2+px+q)=0$　……②　（p，q は実数）と変形できる．

①と②の係数を比較して

$a=-n+p$　……④　　$b=-np+q$　……⑤　　$1=-nq$　……⑥

a，n は整数より　④から p も整数　　よって　⑤より q も整数

また，$x^2+px+q=0$　が虚数解をもつので　$p^2-4q<0$　……⑦

よって　$0 \leqq p^2<4q$　より　$q>0$　　したがって　⑥より　$n=-1$，$q=1$

このとき④，⑤より　$a=p+1$，$b=p+1$

また⑦より　$p^2-4<0$　　p は整数より　$p=-1,\ 0,\ 1$

したがって　**$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2)$　の3組．**

このうち a が最大となるのは　$(a,\ b)=(2,\ 2)$

> **3**［2］　2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．

n が3の倍数のとき　n が素数になるのは $n=3$ のみ

このとき $n^2+2=3^2+2=11$　これは確かに素数である

n が3の倍数でないとき $n=3k \pm 1$　（k：自然数）　と表せる．

$n=3k+1$　のとき $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1) \geqq 3(3+2+1)>3$

$n=3k-1$ のとき　$n^2+2=3(3k^2-2k+1) \geqq 3(3-2+1)>3$

よっていずれも3より大きい3の倍数より素数ではない．

以上より題意を満たすのは $n=3$ に限ることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 47 講　総合問題⒂

三角形 ABC において $\angle A=\theta$，$\angle B=2\theta$ であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を $\cos\theta$ を用いて表すと $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\boxed{\text{ア}}\cos\theta$ である．

(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}$ の値が最大となるとき，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

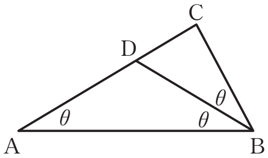
(3) $\angle B$ の二等分線と辺 AC との交点を D とするとき，等式

$$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}$$

を満たす θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$　である．

(1) 正弦定理より　$\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{AC}{\sin 2\theta}$

よって　$\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\mathbf{2}\cos\theta$



(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos(\pi-3\theta)$

$=\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=-4\cos^3\theta+2\cos^2\theta+4\cos\theta-1$ ……①

$t=\cos\theta$　とおくと　$0<3\theta<\pi$　より　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$　　よって　$\dfrac{1}{2}<t<1$

このとき　①より　$-4t^3+2t^2+4t-1$

これを　$f(t)$ とおくと

$f'(t)=-12t^2+4t+4=-4(3t^2-t-1)$

$f'(t)=0$　より　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

t	$\left(\dfrac{1}{2}\right)$	…	$\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$	…	(1)
$f'(t)$		＋	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

したがって，与式が最大となるのは　$\cos\theta=\mathbf{\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}}$　のときである．

(3) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}=\cos\theta+\cos\theta+\cos(\pi-2\theta)$

$=2\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+1$

よって与式は　$-4t^3+2t^2+4t-1=-2t^2+2t+1$　つまり　$2t^3-2t^2-t+1=0$

$(t-1)(2t^2-1)=0$　　$\dfrac{1}{2}<t<1$ より　$t=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　$\theta=\mathbf{\dfrac{\pi}{4}}$